Il problema di Mahler sulla misura di numeri algebrici e connessioni con dinamica aritmetica

Introduzione alla misura di Mahler e contesto storico

Il problema di Mahler rappresenta uno degli enigmi più profondi e persistenti nella teoria dei numeri algebrici, un campo che studia le proprietà dei numeri che sono soluzioni di equazioni polinomiali a coefficienti interi. Formulato dal matematico tedesco Kurt Mahler negli anni quaranta del ventesimo secolo, questo problema chiede di caratterizzare la "dimensione" o "complessità" dei numeri algebrici attraverso una quantità chiamata misura di Mahler, e di comprendere quali valori questa misura possa assumere. Nonostante quasi ottanta anni di ricerca intensiva da parte di alcuni dei più brillanti matematici del mondo, molti aspetti fondamentali del problema rimangono irrisolti, rendendo il problema di Mahler un esempio paradigmatico di una questione matematica deceptivamente semplice da formulare ma straordinariamente difficile da risolvere.

Per comprendere la profondità del problema di Mahler, dobbiamo prima stabilire cosa sia esattamente la misura di Mahler e perché questa quantità rivesta un'importanza così centrale nella teoria dei numeri. Consideriamo un polinomio a coefficienti interi P(x) = a_n x^n + a_(n-1) x^(n-1) + ... + a_1 x + a_0, dove a_n è diverso da zero. La misura di Mahler M(P) di questo polinomio è definita come l'integrale logaritmico della norma del polinomio sul cerchio unitario nel piano complesso, normalizzato appropriatamente. Più precisamente, se scriviamo il polinomio nella forma fattorizzata P(x) = a_n Π_(i=1 to n) (x - α_i), dove gli α_i sono le radici complesse del polinomio, allora la misura di Mahler è data da M(P) = |a_n| Π_(i=1 to n) max(1, |α_i|).

Questa definizione può sembrare astrusa a prima vista, ma ha un'interpretazione geometrica elegante. La misura di Mahler quantifica, in un certo senso, quanto le radici del polinomio siano "grandi". Se tutte le radici giacciono sul cerchio unitario (cioè hanno modulo esattamente uguale a uno), allora M(P) = |a_n|. Se alcune radici hanno modulo maggiore di uno, esse contribuiscono moltiplicativamente alla misura proporzionalmente al loro modulo. Le radici con modulo minore di uno non contribuiscono affatto, poiché vengono rimpiazzate dal valore uno nella formula.

Kurt Mahler introdusse questa quantità nel 1962, sebbene concetti correlati fossero stati studiati da altri matematici precedentemente. Mahler era particolarmente interessato a comprendere quali valori la misura M(α) di un numero algebrico α (definita come la misura del suo polinomio minimo, cioè il polinomio monico a coefficienti interi di grado minimo che ha α come radice) potesse assumere. Una domanda naturale che emerse immediatamente fu: esiste un valore positivo minimo per M(α) quando α è un numero algebrico diverso da zero e non una radice dell'unità?

Le radici dell'unità, cioè i numeri complessi ζ tali che ζ^n = 1 per qualche intero positivo n, hanno misura di Mahler esattamente uguale a uno. Questo si può vedere facilmente: se ζ è una radice n-esima primitiva dell'unità, allora il suo polinomio minimo è il polinomio ciclotomico Φ_n(x), le cui radici sono tutte sul cerchio unitario. Quindi M(ζ) = 1. Mahler congetturò che per qualunque numero algebrico α che non sia zero né una radice dell'unità, dovrebbe esistere un limite inferiore positivo universale per M(α), indipendente dal particolare α scelto.

Più precisamente, la congettura di Mahler afferma che esiste una costante c > 1 tale che M(α) ≥ c per ogni numero algebrico α diverso da zero e non radice dell'unità. Mahler stesso dimostrò che tale limite inferiore esiste per numeri algebrici di grado fissato: se il grado di α (cioè il grado del suo polinomio minimo) è limitato superiormente da d, allora esiste una costante c(d) > 1 tale che M(α) ≥ c(d). Tuttavia, stabilire un limite inferiore uniforme valido per tutti i gradi si rivelò molto più difficile, e questa questione rimane aperta ancora oggi.

La difficoltà del problema deriva da diversi fattori. Primo, esistono sequenze di numeri algebrici i cui gradi crescono all'infinito e le cui misure di Mahler tendono a uno. Costruire tali sequenze è relativamente facile usando la teoria delle altezze e le proprietà dei polinomomi ciclotomici. Secondo, non è chiaro a priori se il limite inferiore, se esiste, debba dipendere dal grado del numero algebrico o se possa essere veramente universale. Terzo, la misura di Mahler ha connessioni profonde con molte altre aree della matematica, inclusa la teoria dei numeri trascendenti, la dinamica dei sistemi aritmetici, la geometria aritmetica e persino la teoria ergodica, rendendo il problema multiforme e richiedendo tecniche da domini diversi.

Per apprezzare meglio la natura del problema, consideriamo alcuni esempi concreti. Il numero algebrico più semplice dopo le radici dell'unità è probabilmente la radice quadrata di due, √2. Il polinomio minimo di √2 è x^2 - 2, le cui radici sono √2 e -√2. Entrambe hanno modulo √2 ≈ 1,414. Quindi M(√2) = √2 × √2 = 2. Similmente, per la radice cubica di due, ∛2, il polinomio minimo è x^3 - 2, con radici ∛2, ω∛2, ω^2∛2, dove ω = e^(2πi/3) è una radice cubica primitiva dell'unità. Tutte queste radici hanno modulo ∛2, quindi M(∛2) = 2.

Questi esempi potrebbero suggerire che la misura di Mahler tende ad assumere valori "ragionevoli" e discreti. Tuttavia, la situazione è molto più complicata. Consideriamo il numero di Pisot-Vijayaraghavan (spesso chiamato semplicemente numero di Pisot), che è un numero algebrico reale positivo maggiore di uno tale che tutti i suoi coniugati algebrici (le altre radici del suo polinomio minimo) hanno modulo strettamente minore di uno. Il più piccolo numero di Pisot è la radice reale positiva del polinomio x^3 - x - 1, che vale approssimativamente 1,3247. Per un numero di Pisot θ, la misura di Mahler è semplicemente M(θ) = θ stesso, poiché è l'unica radice del suo polinomio minimo con modulo maggiore o uguale a uno.

I numeri di Pisot formano un insieme notevole con proprietà aritmetiche e topologiche affascinanti. Charles Pisot e Tirukkannapuram Vijayaraghavan studiarono questi numeri indipendentemente negli anni trenta e quaranta, scoprendo che l'insieme dei numeri di Pisot è chiuso nell'insieme dei numeri reali (un fatto non banale che richiede tecniche sofisticate per essere dimostrato), e che il più piccolo punto di accumulazione di questo insieme è il numero aureo φ = (1 + √5)/2 ≈ 1,618. Poiché ogni numero di Pisot ha misura di Mahler

uguale a se stesso, e poiché il più piccolo numero di Pisot è circa 1,3247, questo fornisce un limite inferiore per la misura di Mahler di questa particolare classe di numeri algebrici.

Tuttavia, i numeri di Pisot rappresentano solo una classe speciale di numeri algebrici. Esistono numeri algebrici che non sono numeri di Pisot e che hanno misure di Mahler molto vicine a uno. Per esempio, consideriamo i polinomi della forma P_n(x) = x^n - x - 1. Per n grande, questo polinomio ha una radice reale positiva α_n vicina a uno, e tutte le altre radici hanno modulo vicino a uno. La misura di Mahler M(α_n) tende a uno quando n tende all'infinito, anche se α_n non è una radice dell'unità. Questo esempio dimostra che non è possibile sperare in un limite inferiore molto grande per la misura di Mahler.

La connessione tra la misura di Mahler e altre nozioni di altezza in geometria aritmetica è fondamentale per comprendere la profondità del problema. L'altezza di Weil h(α) di un numero algebrico α è un'altra misura della sua "complessità", definita in termini della dimensione dei coefficienti del suo polinomio minimo. Esiste una relazione stretta tra la misura di Mahler e l'altezza di Weil: per un numero algebrico α di grado d, abbiamo h(α) = (1/d) log M(α). Questa relazione significa che studiare il comportamento della misura di Mahler è equivalente a studiare il comportamento dell'altezza logaritmica normalizzata.

La teoria delle altezze è centrale nella geometria diofantea e nella geometria aritmetica. L'altezza misura la complessità aritmetica di un numero algebrico o di un punto su una varietà algebrica. Numeri con altezza piccola sono, in un certo senso, "semplici" dal punto di vista aritmetico. Il teorema di Northcott afferma che per ogni intero positivo d e ogni numero reale h_0, esistono solo finitamente molti numeri algebrici di grado al più d e altezza al più h_0. Questo risultato fondamentale implica che l'insieme dei numeri algebrici di grado limitato e altezza limitata è finito, una proprietà di finitezza cruciale in molte applicazioni.

La congettura di Mahler può essere riformulata in termini di altezze: afferma che esiste un ε > 0 tale che h(α) ≥ ε per ogni numero algebrico α che non sia zero né radice dell'unità. Se questa congettura fosse vera, fornirebbe un gap uniforme tra l'altezza zero (raggiunta solo da zero e radici dell'unità) e tutte le altre altezze. L'esistenza di tale gap avrebbe conseguenze profonde per molti problemi in teoria dei numeri, inclusi problemi diofantei, problemi di approssimazione e questioni sulla distribuzione di punti algebrici su varietà.

Il problema di Mahler è intimamente connesso alla teoria dei numeri trascendenti. Se potessimo dimostrare che certi numeri (come e o π) non sono troppo ben approssimabili da numeri algebrici di altezza limitata, questo fornirebbe informazioni sulla distribuzione delle misure di Mahler. Inversamente, se conoscessimo dettagli precisi sulla distribuzione delle misure di Mahler, potremmo derivare nuovi risultati di trascendenza. Questa relazione bidirezionale tra il problema di Mahler e la teoria dei numeri trascendenti è stata sfruttata in molte ricerche, anche se una risoluzione completa rimane elusiva.

Un progresso significativo fu ottenuto nel 1984 da Enrico Bombieri e Jeffrey Vaaler, che dimostrarono che non esistono numeri algebrici di grado d con altezza logaritmica nell'intervallo (0, c/d), dove c è una costante esplicita che può essere calcolata. Questo risultato, noto come il limite inferiore di Dobrowolski (da Edward Dobrowolski che aveva ottenuto un risultato precedente nel 1979 con costanti leggermente diverse), fornisce un limite inferiore per la misura di Mahler che dipende dal grado del numero algebrico. Specificamente, Dobrowolski dimostrò che per ogni numero algebrico α di grado d che non

sia zero né radice dell'unità, vale M(α) ≥ 1 + c/(d log(3d)), dove c è una costante positiva assoluta.

Il limite di Dobrowolski è notevole perché fornisce un bound esplicito, anche se dipende dal grado. Tuttavia, non risolve la congettura di Mahler originale, che richiederebbe un limite inferiore uniforme indipendente dal grado. Miglioramenti successivi del limite di Dobrowolski hanno affinato la costante c e ottimizzato la dipendenza dal grado, ma nessuno è riuscito a eliminare completamente la dipendenza dal grado.

La dimostrazione del limite di Dobrowolski utilizza tecniche sofisticate dalla teoria analitica dei numeri e dalla geometria dei numeri. L'idea centrale è costruire polinomi ausiliari con proprietà speciali che permettano di ottenere contraddizioni se la misura di Mahler fosse troppo piccola. Questi polinomi ausiliari sono costruiti usando il principio del cassetto (pigeonhole principle) applicato a uno spazio di polinomi di dimensione opportunamente scelta. La tecnica richiede stime delicate sulle norme di questi polinomi e sull'applicazione di risultati dalla teoria dell'approssimazione diofantea.

Un aspetto affascinante del problema di Mahler è la sua connessione con la dinamica aritmetica, un campo della matematica che studia l'iterazione di mappe razionali su spazi di numeri algebrici e le proprietà delle orbite risultanti. Consideriamo una mappa razionale φ: P^1(C) → P^1(C) definita su numeri complessi, cioè una funzione del tipo φ(z) = f(z)/g(z) dove f e g sono polinomi senza fattori comuni. Possiamo definire un'altezza canonica associata a φ, denotata h_φ, che misura la crescita dell'altezza sotto iterazione della mappa.

Per un punto α nella retta proiettiva e per una mappa razionale φ di grado d ≥ 2, l'altezza canonica è definita come h_φ(α) = lim_(n→∞) h(φ^n(α))/d^n, dove φ^n denota l'n-esima iterata di φ e h è l'altezza di Weil logaritmica. Questo limite esiste sempre per mappe razionali di grado almeno due ed è invariante per coniugazione con automorfismi di P^1. La proprietà fondamentale dell'altezza canonica è che h_φ(φ(α)) = d × h_φ(α), cioè l'altezza canonica si comporta moltiplicativamente sotto applicazione della mappa.

Un punto α si dice preperiodico per φ se la sua orbita {α, φ(α), φ^2(α), φ^3(α), ...} è finita, cioè se esiste m < n tale che φ^m(α) = φ^n(α). I punti preperiodici giocano un ruolo analogo alle radici dell'unità nella teoria moltiplicativa ordinaria. Infatti, un numero algebrico α è una radice dell'unità se e solo se è preperiodico per la mappa φ(z) = z^d per qualche d ≥ 2. Il teorema di Northcott per le altezze canoniche afferma che l'insieme dei punti algebrici preperiodici di altezza canonica zero è esattamente l'insieme dei punti preperiodici.

Il collegamento tra il problema di Mahler e la dinamica aritmetica emerge quando consideriamo la mappa moltiplicativa φ(z) = z^d. Per questa mappa particolare, l'altezza canonica coincide essenzialmente con l'altezza di Weil ordinaria (a meno di normalizzazioni). Un numero algebrico α ha altezza canonica zero per questa mappa se e solo se è zero o una radice dell'unità. La congettura di Mahler, in questo contesto, afferma che esiste un gap positivo tra l'altezza canonica zero e tutte le altre altezze canoniche positive.

Questa osservazione suggerisce una generalizzazione naturale del problema di Mahler a mappe razionali arbitrarie: per una mappa razionale φ di grado almeno due definita su numeri algebrici, esiste un gap positivo nella distribuzione delle altezze canoniche di punti

algebrici non preperiodici? Questa domanda, nota come congettura di Bogomolov per altezze canoniche (dal matematico russo Fedor Bogomolov), rappresenta una vasta generalizzazione del problema di Mahler e ha stimolato enormi quantità di ricerca nelle ultime decadi.

La congettura di Bogomolov fu dimostrata in piena generalità da Shou-Wu Zhang nel 1998, un risultato monumentale che valse a Zhang numerosi riconoscimenti e che rappresenta uno dei trionfi della geometria aritmetica moderna. La dimostrazione di Zhang utilizza tecniche profonde dalla teoria delle altezze, dalla teoria dell'intersezione aritmetica e dalla geometria delle varietà abeliane. Essenzialmente, Zhang dimostra che su varietà abeliane (generalizzazioni di curve ellittiche a dimensioni superiori), le altezze canoniche di punti non torsorii (generalizzazioni di punti non di ordine finito) sono limitate inferiormente da quantità che dipendono dalla geometria della varietà.

Il risultato di Zhang ha conseguenze immediate per il problema di Mahler nel caso particolare della mappa moltiplicativa, confermando l'esistenza di un limite inferiore (dipendente dal grado) per la misura di Mahler. Tuttavia, la generalità del teorema di Zhang copre situazioni molto più ampie e ha applicazioni a numerosi problemi in geometria diofantea, teoria dei numeri computazionale e dinamica aritmetica.

Proprietà fondamentali della misura di Mahler e risultati classici

La misura di Mahler possiede proprietà algebriche e analitiche ricche che la rendono uno strumento potente per studiare la struttura dei numeri algebrici. Per comprendere appieno queste proprietà e il ruolo centrale che la misura di Mahler gioca nella teoria dei numeri, dobbiamo esplorare in dettaglio le sue caratteristiche fondamentali, le sue relazioni con altre quantità aritmetiche e i principali teoremi che governano il suo comportamento.

Una delle proprietà più importanti della misura di Mahler è la sua moltiplicatività. Se α e β sono due numeri algebrici, allora $M(\alpha\beta) = M(\alpha) M(\beta)$. Questa proprietà segue direttamente dalla definizione: se $P(x)$ e $Q(x)$ sono i polinomi minimi di α e β rispettivamente, allora il prodotto dei due polinomi (opportunamente normalizzato) fornisce un polinomio che ha $\alpha\beta$ come radice, e la misura di questo prodotto è il prodotto delle misure. Più precisamente, se $P(x) = a \prod_i (x - \alpha_i)$ e $Q(x) = b \prod_j (x - \beta_j)$, allora possiamo considerare il polinomio $R(x)$ che è il prodotto di tutti i fattori della forma $(x - \alpha_i \beta_j)$, e la misura di R è legata al prodotto $M(\alpha)M(\beta)$.

La moltiplicatività della misura di Mahler implica che l'altezza logaritmica $h(\alpha) = \log M(\alpha)/\deg(\alpha)$ si comporta additivamente rispetto al prodotto: $h(\alpha\beta) = h(\alpha) + h(\beta) + O(1/\deg(\alpha\beta))$. Il termine di errore $O(1/\deg(\alpha\beta))$ deriva dal fatto che il grado di $\alpha\beta$ non è necessariamente uguale al prodotto dei gradi di α e β, ma è al più questo prodotto. Questa quasi-additività rende l'altezza logaritmica uno strumento naturale per studiare la struttura moltiplicativa dei numeri algebrici.

Un'altra proprietà cruciale è la submoltiplicatività rispetto alla somma: $M(\alpha + \beta) \leq 2^{(\deg(\alpha)\deg(\beta))} M(\alpha) M(\beta)$. Questa disuguaglianza non è così stretta come la

moltiplicatività esatta del prodotto, ma fornisce comunque un controllo sul comportamento della misura sotto addizione. La costante 2^(deg(α)deg(β)) può sembrare grande, ma è essenziale: non è possibile ottenere un bound molto migliore in generale, come dimostrato da controesempi espliciti.

La misura di Mahler ha anche una relazione interessante con le norme. Se α è un numero algebrico di grado d sul campo dei razionali Q, allora la norma N(α) è il prodotto di tutti i coniugati di α, cioè N(α) = Π_(i=1 to d) α_i se α_1, ..., α_d sono le radici del polinomio minimo di α. La norma è sempre un numero razionale (infatti, è il termine costante del polinomio minimo a meno di segno e normalizzazione). La relazione tra misura di Mahler e norma è data da M(α) ≥ |N(α)|^(1/d), con uguaglianza se e solo se tutti i coniugati di α hanno modulo al più uno.

Questa relazione fornisce un bound inferiore elementare ma utile per la misura di Mahler. Se α è un intero algebrico (cioè la radice di un polinomio monico a coefficienti interi), allora |N(α)| è un intero positivo, quindi |N(α)| ≥ 1, il che implica M(α) ≥ 1. Per interi algebrici che non sono radici dell'unità, abbiamo |N(α)| ≥ 2 se α non è un'unità nel suo anello di interi (cioè se N(α) non è ±1), fornendo M(α) ≥ 2^(1/d).

La teoria delle unità negli anelli di interi algebrici è intimamente connessa al problema di Mahler. Un'unità in un anello di interi algebrici è un elemento la cui norma è ±1. Per il campo Q(α) generato da un numero algebrico α, le unità formano un gruppo moltiplicativo. Il teorema delle unità di Dirichlet, uno dei risultati fondamentali della teoria algebrica dei numeri del diciannovesimo secolo, descrive la struttura di questo gruppo: per un campo di numeri di grado d con r_1 posti reali e r_2 coppie di posti complessi coniugati (quindi r_1 + 2r_2 = d), il gruppo delle unità è isomorfo a μ × Z^(r_1+r_2-1), dove μ è il gruppo finito delle radici dell'unità nel campo.

Le unità che non sono radici dell'unità hanno misure di Mahler strettamente maggiori di uno, e lo studio della distribuzione di queste misure è un problema difficile. Il più piccolo numero di Salem, che è strettamente correlato ai numeri di Pisot ma definito in modo leggermente diverso, ha misura di Mahler circa 1,1762, fornendo un altro esempio di numero algebrico con misura vicina a uno ma non uguale a uno.

Un numero di Salem è un numero algebrico reale positivo θ > 1 tale che tutti i coniugati di θ diversi da θ e 1/θ hanno modulo esattamente uguale a uno. I numeri di Salem sono reciproci, nel senso che se θ è un numero di Salem, anche 1/θ lo è, e il loro polinomio minimo è palindromico (invariante quando invertiamo l'ordine dei coefficienti dopo opportuna normalizzazione). L'insieme dei numeri di Salem ha una struttura topologica affascinante: è denso nell'insieme dei numeri reali maggiori di uno, a differenza dell'insieme dei numeri di Pisot che è chiuso e discreto in ogni intervallo limitato.

La densità dell'insieme dei numeri di Salem suggerisce che per ogni ε > 0, esistono numeri di Salem θ con 1 < θ < 1 + ε, e quindi M(θ) = θ < 1 + ε. Questo dimostra che non possiamo sperare in un limite inferiore molto grande per la misura di Mahler di tutti i numeri algebrici. Tuttavia, la questione cruciale è se esista un limite inferiore positivo assoluto, per quanto piccolo.

Il risultato di Dobrowolski del 1979 fornì il primo limite inferiore esplicito e forte per la misura di Mahler in termini del grado. La forma precisa del teorema di Dobrowolski è la seguente: esiste una costante assoluta c > 0 tale che per ogni numero algebrico α di grado d ≥ 2 che non sia zero né radice dell'unità, vale log M(α) ≥ c/(d (log(3d))^3). Questo può essere riscritto come M(α) ≥ (1 + c/d(log(3d))^3), mostrando esplicitamente quanto vicino a uno può essere la misura di Mahler per numeri di grado grande.

La dimostrazione di Dobrowolski è tecnicamente impegnativa e rappresenta un tour de force di teoria analitica dei numeri. L'idea centrale è costruire un polinomio ausiliario che annichila α con alta molteplicità e che ha coefficienti controllabili. Supponiamo per assurdo che M(α) sia molto vicino a uno. Allora tutte le radici del polinomio minimo di α hanno modulo vicino a uno. Costruiamo un polinomio della forma P(x) = Π_(j=0 to N-1) Q(ω^j x), dove Q è il polinomio minimo di α, ω è una radice dell'unità appropriata, e N è scelto opportunamente grande.

Questo polinomio prodotto ha α come radice con molteplicità N, e le sue altre radici sono della forma ω^j α_i, dove α_i sono i coniugati di α. Se tutte queste radici hanno modulo vicino a uno, allora il polinomio P ha coefficienti che possono essere stimati usando formule per polinomi simmetrici. Applicando il principio di Dirichlet (pigeonhole principle) allo spazio vettoriale dei polinomi di grado limitato con coefficienti interi limitati, possiamo trovare due polinomi distinti P_1 e P_2 della forma descritta sopra che sono molto vicini come funzioni sul cerchio unitario.

La differenza P_1 - P_2 è un polinomio non nullo che ha α come radice con alta molteplicità e che è molto piccolo in norma sul cerchio unitario. Usando il principio di Schwarz-Pick o risultati correlati dall'analisi complessa, possiamo derivare una contraddizione: un polinomio non nullo con una radice di molteplicità alta non può essere simultaneamente molto piccolo in norma e avere coefficienti interi non tutti nulli. I dettagli tecnici richiedono stime delicate su integrali sul cerchio unitario, applicazioni della disuguaglianza di Jensen e uso di risultati dalla teoria dell'approssimazione polinomiale.

Miglioramenti successivi del limite di Dobrowolski hanno affinato la dipendenza dalla potenza del logaritmo. Nel 1980, Guy Diaz dimostrò un bound con (log d)^2 invece di (log d)^3. Nel 1984, Silvio Levy migliorò ulteriormente il risultato. Il miglior bound noto attualmente, dovuto a Éric Gaudron e Gaël Rémond nel 2013, ha la forma log M(α) ≥ c/(d log(ed)), dove c è una costante esplicita calcolabile. Ogni miglioramento richiede raffinamenti tecnici sofisticati delle tecniche originali di Dobrowolski.

Un aspetto interessante della misura di Mahler è la sua relazione con la discriminante del campo di numeri Q(α). La discriminante misura, in un certo senso, la "ramificazione" del campo di numeri, cioè quanto i primi razionali si fattorizzano in modo complicato nell'anello degli interi del campo. Esiste una relazione tra la misura di Mahler e la radice quadrata della discriminante normalizzata, anche se questa relazione è meno diretta delle proprietà moltiplicative discusse precedentemente.

La misura di Mahler può anche essere espressa in termini di un integrale. Una definizione alternativa, equivalente alla definizione tramite massimo delle radici, è M(P) = exp(∫_0^1 log|P(e^(2πit))| dt) per un polinomio monico P. Questa formulazione integrale rende manifesta la connessione con la teoria del potenziale e con la capacità logaritmica in teoria

delle funzioni. L'integrale ∫_0^1 log|P(e^(2πit))| dt può essere visto come una media logaritmica del modulo del polinomio sul cerchio unitario.

Usando questa formulazione integrale, possiamo derivare diverse proprietà utili della misura di Mahler. Per esempio, la misura è invariante sotto l'inversione delle radici: se P(x) = x^n Q(1/x) (cioè se invertiamo l'ordine dei coefficienti di Q), allora M(P) = M(Q). Questa proprietà riflette il fatto che il cerchio unitario è invariante sotto l'inversione z → 1/z, e quindi l'integrale logaritmico è lo stesso.

La teoria delle funzioni potenziali fornisce un'altra prospettiva sulla misura di Mahler. Dato un insieme E nel piano complesso, la capacità logaritmica cap(E) di E misura, in un certo senso, la "dimensione" di E dal punto di vista del potenziale. Per un insieme finito di punti {α_1, ..., α_n}, la capacità è correlata alla media geometrica delle distanze tra i punti. La misura di Mahler di un polinomio P(x) = Π_i (x - α_i) è legata alla capacità dell'insieme delle radici rispetto al cerchio unitario.

Più precisamente, se tutte le radici di P giacciono sul cerchio unitario, allora M(P) è correlata alla capacità transfinita dell'insieme delle radici. Se alcune radici sono esterne al cerchio, esse contribuiscono moltiplicativamente alla misura. Questa interpretazione in termini di teoria del potenziale ha permesso di applicare tecniche dalla teoria dell'approssimazione razionale e dalla teoria delle funzioni analitiche allo studio della misura di Mahler.

Un altro risultato importante è il teorema di Lehmer, che è essenzialmente equivalente alla congettura di Mahler per polinomi di grado fissato. Derrick Henry Lehmer, nel 1933, pone la seguente domanda: qual è il valore minimo positivo della misura di Mahler per un polinomio monico irriducibile di grado fissato? Lehmer stesso trovò un polinomio di grado dieci, x^10 + x^9 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 + x + 1, la cui radice reale positiva ha misura di Mahler circa 1,17628, notevolmente piccola per un numero algebrico di grado così piccolo.

Il polinomio di Lehmer è stato per molti anni il record per la misura di Mahler più piccola di un polinomio irriducibile non ciclotomico (cioè un polinomio il cui gruppo di Galois è non banale). Nonostante decenni di ricerca e l'esame di milioni di polinomi tramite ricerche computazionali, non è stato trovato alcun polinomio irriducibile con misura di Mahler più piccola del polinomio di Lehmer. Questo ha portato molti a congetturare che il polinomio di Lehmer potrebbe effettivamente minimizzare la misura di Mahler, almeno tra polinomi di piccolo grado.

Tuttavia, dimostrare che il polinomio di Lehmer minimizza effettivamente la misura sembra quasi altrettanto difficile quanto risolvere la congettura di Mahler generale. Il problema è che non abbiamo buoni metodi per enumerare sistematicamente tutti i polinomi irriducibili e calcolare le loro misure. Il numero di polinomi monici irriducibili di grado d con coefficienti interi limitati da H cresce come H^d, rendendo la ricerca esaustiva proibitiva per gradi anche moderatamente grandi.

La distribuzione statistica delle misure di Mahler è un'altra questione affascinante. Se scegliamo polinomi "a caso" con coefficienti interi distribuiti uniformemente in un intervallo [-H, H], quale è la distribuzione delle misure di Mahler risultanti? Chris Smyth e altri matematici hanno studiato questa domanda usando metodi probabilistici e analisi asintotica.

I risultati suggeriscono che la maggior parte dei polinomi casuali ha misura di Mahler "tipica", con relativamente pochi polinomi che hanno misure eccezionalmente piccole o grandi.

Più precisamente, per un polinomio casuale di grado d con coefficienti uniformi in [-H, H], la misura di Mahler logaritmica log M(P) è tipicamente dell'ordine di d log H, con fluttuazioni dell'ordine di √(d log H). Questo comportamento può essere compreso euristicamente notando che le radici di un polinomio casuale sono distribuite approssimativamente uniformemente in una corona centrata nell'origine con raggio interno e esterno proporzionali a H^(1/d), e quindi la contribuzione logaritmica media di ciascuna radice è dell'ordine di log H.

La connessione tra la misura di Mahler e la teoria ergodica emerge quando consideriamo l'azione della moltiplicazione sulla cerchia proiettiva dei numeri algebrici. Possiamo definire una misura naturale sull'insieme dei numeri algebrici di altezza limitata, e studiare come questa misura si trasforma sotto operazioni aritmetiche come moltiplicazione per un numero algebrico fissato o elevamento a potenza. Le proprietà ergodiche di queste trasformazioni hanno implicazioni per la distribuzione delle misure di Mahler.

Laurent Denis e altri hanno studiato le proprietà ergodiche di mappe polinomiali sulla chiusura algebrica di un campo finito, dove analoghe della misura di Mahler possono essere definite usando valutazioni p-adiche invece della valutazione archimedea standard. Queste misure di Mahler p-adiche hanno proprietà sorprendentemente simili alle loro controparti archimedee, e risultati in un contesto spesso illuminano l'altro. Il teorema di equidistribuzione di Bilu per punti di piccola altezza canonica è un risultato profondo in questa direzione.

Il teorema di Bilu afferma che i punti algebrici di altezza canonica piccola per una mappa razionale sono equidistribuiti rispetto a una misura naturale (la misura di Green nel caso archimedeo). Questo risultato generalizza teoremi classici di equidistribuzione in teoria dei numeri, come il teorema di Weyl sulla distribuzione uniforme di successioni, e ha applicazioni alla distribuzione di punti preperiodici e alla struttura delle orbite sotto iterazione di mappe razionali.

Dinamica aritmetica e altezze canoniche

La dinamica aritmetica rappresenta una sintesi affascinante tra due domini della matematica che potrebbero sembrare distanti: la teoria dei sistemi dinamici, che studia il comportamento a lungo termine di mappe iterate, e la geometria aritmetica, che studia le proprietà diofantee di punti su varietà algebriche. Questa fusione ha portato a nuove prospettive sul problema di Mahler e ha rivelato connessioni profonde tra la misura di numeri algebrici e il comportamento orbitale di mappe razionali.

Per comprendere questa connessione, dobbiamo prima stabilire i fondamenti della teoria delle altezze canoniche nel contesto dinamico. Consideriamo una mappa razionale φ: P^1 → P^1 definita su numeri complessi, dove P^1 denota la retta proiettiva complessa (che possiamo pensare come il piano complesso unito con un punto all'infinito). Una tale mappa può essere scritta in coordinate affini come φ(z) = f(z)/g(z), dove f e g sono polinomi senza fattori comuni. Il grado di φ è definito come deg(φ) = max(deg(f), deg(g)), e assumiamo sempre deg(φ) ≥ 2 per avere dinamica non banale.

L'altezza di Weil logaritmica standard h: P^1($\bar{\mathbb{Q}}$) → R≥0, dove $\bar{\mathbb{Q}}$ denota la chiusura algebrica dei razionali, è definita sui punti algebrici della retta proiettiva. Per un punto α in P^1($\bar{\mathbb{Q}}$) rappresentato in coordinate omogenee come [x : y] con x, y elementi di $\bar{\mathbb{Q}}$ non entrambi zero, l'altezza è definita come h([x : y]) = (1/[Q(x,y) : Q]) Σ_v log max(|x|_v, |y|_v), dove la somma è su tutti i posti (valutazioni) v del campo di numeri Q(x,y), e le norme |·|_v sono normalizzate appropriatamente.

Questa definizione può sembrare tecnica, ma ha un'interpretazione geometrica chiara: l'altezza misura la complessità aritmetica di un punto razionale. Punti con altezza piccola sono, in un certo senso, semplici da descrivere usando numeri razionali o algebrici di piccola dimensione. Per punti nella retta affine (cioè punti che non sono il punto all'infinito), l'altezza si riduce essenzialmente alla formula h(α) = (1/d) log M(α) che abbiamo già incontrato, dove d = [Q(α) : Q] è il grado di α.

Quando iteriamo una mappa razionale φ, l'altezza dei punti nell'orbita cresce tipicamente. Se α è un punto algebrico e consideriamo la sequenza α, φ(α), φ^2(α), φ^3(α), ..., allora le altezze h(φ^n(α)) crescono esponenzialmente con n. Più precisamente, esiste una relazione fondamentale nota come proprietà di trasformazione dell'altezza: h(φ(α)) = deg(φ) h(α) + O(1), dove O(1) denota un termine limitato che dipende da φ ma non da α né da iterazioni ulteriori.

Questa relazione quasi-moltiplicativa suggerisce che potrebbe esistere una funzione di altezza normalizzata che si comporta esattamente moltiplicativamente sotto applicazione di φ. Tale funzione esiste ed è chiamata altezza canonica associata a φ, denotata $\hat{h}_\varphi$. La costruzione dell'altezza canonica è dovuta a Joseph Silverman e generalizza costruzioni precedenti per mappe specifiche fatte da André Néron per curve ellittiche.

L'altezza canonica è definita come $\hat{h}_\varphi(\alpha) = \lim_{n\to\infty} h(\varphi^n(\alpha))/\deg(\varphi)^n$. Questo limite esiste sempre per mappe razionali di grado almeno due ed è una funzione ben definita da P^1($\bar{\mathbb{Q}}$) a R≥0. La proprietà fondamentale dell'altezza canonica è l'invarianza funzionale: $\hat{h}_\varphi(\varphi(\alpha)) = \deg(\varphi)\,\hat{h}_\varphi(\alpha)$ per ogni punto α. Inoltre, l'altezza canonica è strettamente legata all'altezza di Weil: esiste una funzione limitata λ_φ tale che $\hat{h}_\varphi(\alpha) = h(\alpha) + \lambda_\varphi(\alpha)$ per ogni α.

Un punto α si dice preperiodico per φ se la sua orbita è finita, cioè se esistono interi m < n tali che φ^m(α) = φ^n(α). Equivalentemente, α è preperiodico se φ^k(α) è periodico per qualche k ≥ 0, dove un punto β è periodico se φ^p(β) = β per qualche p ≥ 1. I punti preperiodici giocano un ruolo cruciale nella dinamica aritmetica e sono gli analoghi dinamici delle radici dell'unità nella teoria moltiplicativa.

Il teorema di Northcott per altezze canoniche stabilisce che un punto ha altezza canonica zero se e solo se è preperiodico. Questo risultato è profondo e non banale: afferma che $\hat{h}_\varphi(\alpha) = 0$ se e solo se l'orbita {φ^n(α) : n ≥ 0} è finita. In altre parole, i punti di altezza canonica zero sono esattamente quelli con dinamica finita. Questo teorema fornisce un criterio puramente aritmetico (altezza canonica zero) per una proprietà puramente dinamica (orbita finita).

La dimostrazione del teorema di Northcott utilizza la relazione $\hat{h}_\varphi(\varphi(\alpha)) = \deg(\varphi)\,\hat{h}_\varphi(\alpha)$. Se $\hat{h}_\varphi(\alpha) = 0$, allora $\hat{h}_\varphi(\varphi^n(\alpha)) = 0$ per ogni n ≥ 0. Ma per punti con altezza canonica

limitata, il teorema di Northcott classico implica che esistono solo finitamente molti punti algebrici di grado limitato con quella altezza canonica. Poiché deg(φ^n(α)) è limitato (è al più deg(φ)^n deg(α), e spesso molto più piccolo per punti in estensioni di campi di dimensione finita), l'insieme {φ^n(α) : n ≥ 0} deve essere finito.

Inversamente, se α è preperiodico, allora l'insieme {φ^n(α) : n ≥ 0} è finito. Applicando la relazione $\hat{h}_\varphi(\varphi^n(\alpha)) = \deg(\varphi)^n \hat{h}_\varphi(\alpha)$ e notando che le altezze canoniche dei punti nell'orbita finita sono tutte legate moltiplicativamente, possiamo dedurre che $\hat{h}_\varphi(\alpha) = 0$. I dettagli tecnici richiedono attenzione ai casi speciali e alla possibilità di orbite che iniziano con iterazioni iniziali diverse prima di entrare in un ciclo.

La congettura di Bogomolov per altezze canoniche afferma che esiste un gap positivo tra l'altezza canonica zero (raggiunta da punti preperiodici) e tutte le altre altezze canoniche positive, almeno per punti in un campo di numeri fissato. Più precisamente, la congettura afferma: sia $\varphi: P^1 \to P^1$ una mappa razionale di grado $d \geq 2$ definita su $\bar{\mathbb{Q}}$, e sia K un campo di numeri. Allora esiste una costante $\varepsilon(\varphi, K) > 0$ tale che per ogni punto α in P^1(K) che non è preperiodico, vale $\hat{h}_\varphi(\alpha) \geq \varepsilon(\varphi, K)$.

Questa congettura fu formulata da Fedor Bogomolov negli anni ottanta come generalizzazione di osservazioni precedenti sulle altezze di punti di ordine infinito su varietà abeliane. Nel caso particolare della mappa moltiplicativa $\varphi(z) = z^d$ per $d \geq 2$, i punti preperiodici sono esattamente zero e le radici dell'unità, e la congettura di Bogomolov si riduce essenzialmente alla congettura di Mahler. Quindi la congettura di Bogomolov può essere vista come una vastissima generalizzazione del problema di Mahler a mappe razionali arbitrarie.

La dimostrazione della congettura di Bogomolov fu annunciata da Shou-Wu Zhang nel 1998 in un articolo seminale che ha avuto un impatto profondo sulla geometria aritmetica. La strategia di Zhang consiste nell'estendere tecniche sviluppate per varietà abeliane al contesto più generale di varietà proiettive dotate di mappe razionali polarizzate. L'idea chiave è costruire una teoria dell'intersezione aritmetica che permetta di calcolare prodotti di altezze e di derivare limiti inferiori da considerazioni di positivitá.

La dimostrazione completa di Zhang è tecnicamente molto sofisticata e richiede strumenti avanzati dalla geometria algebrica aritmetica, inclusa la teoria degli spazi dei moduli, la compattificazione di Deligne-Mumford, le metriche adattate e la teoria dell'intersezione di Arakelov. L'argomento centrale consiste nel ridurre il problema a una questione sulla positività di certi divisori aritmetici su varietà appropriate, e poi usare il teorema di Riemann-Roch aritmetico per derivare le stime necessarie.

Un aspetto particolarmente elegante della dimostrazione di Zhang è l'uso di tecniche di equidistribuzione. Zhang dimostra che per punti di altezza canonica piccola, le misure discrete associate alle loro orbite convergono a una misura naturale sulla varietà, chiamata misura di equilibrio o misura di Green. Questa misura ha supporto nello Julia set della mappa (l'insieme dei punti con dinamica caotica), e le sue proprietà ergodiche permettono di dedurre informazioni sulla distribuzione dei punti algebrici.

Il teorema di equidistribuzione di Bilu, Yuan e Zhang (spesso citato come teorema BYZ) è una versione quantitativa di questa equidistribuzione. Afferma che per sequenze di punti

algebrici con altezza canonica tendente a zero, le misure associate alle orbite dei punti convergono alla misura di equilibrio in una topologia opportuna. Questo risultato ha applicazioni ben oltre la dimostrazione della congettura di Bogomolov: fornisce informazioni sulla distribuzione statistica dei punti algebrici sulla retta proiettiva e permette di studiare questioni di densità e di distribuzione locale.

Nel contesto della mappa moltiplicativa φ(z) = z^d, la misura di equilibrio è semplicemente la misura uniforme sul cerchio unitario, riflettendo il fatto che le orbite di punti vicini al cerchio unitario ruotano uniformemente attorno all'origine. Per mappe più complicate, la misura di equilibrio può avere supporto su insiemi di Cantor complicati e può avere proprietà fractali. Lo studio della dimensione di Hausdorff, dell'entropia e di altre caratteristiche della misura di equilibrio è un'area attiva di ricerca in dinamica complessa.

La connessione tra dinamica aritmetica e teoria dei numeri trascendenti diventa ancora più evidente quando consideriamo il problema di classificare i punti preperiodici. Per una mappa razionale φ definita su $\bar{Q}$, l'insieme Prep(φ) di tutti i punti preperiodici è numerabile (poiché ogni insieme finito di punti algebrici è numerabile). Tuttavia, descrivere esplicitamente questo insieme è generalmente molto difficile. Morton e Silverman formularono una congettura che fornisce un bound superiore sul numero di punti preperiodici razionali (cioè in P^1(Q)) di grado limitato.

La congettura di Morton-Silverman afferma che per ogni intero d ≥ 2 e ogni campo di numeri K, esiste una costante C(d, K) tale che per ogni mappa razionale φ: P^1 → P^1 di grado d definita su K, il numero di punti K-razionali preperiodici è al più C(d, K). In altre parole, il numero di punti preperiodici razionali è limitato in termini solo del grado della mappa e del campo di definizione, indipendentemente dalla mappa specifica scelta.

Questa congettura è stata dimostrata in molti casi speciali ma rimane aperta in generale. Per mappe polinomiali (cioè mappe razionali che mandano il punto all'infinito in se stesso), progressi significativi sono stati fatti usando tecniche dalla teoria delle curve algebriche e dallo studio delle componenti connesse dello Julia set. Per mappe razionali generali, la questione è molto più difficile a causa della complessità della dinamica critica (cioè il comportamento delle orbite dei punti critici, dove la derivata della mappa si annulla).

Un aspetto affascinante della dinamica aritmetica è l'analogia con la geometria delle varietà abeliane. Le varietà abeliane sono generalizzazioni delle curve ellittiche a dimensioni superiori e hanno una ricca teoria aritmetica. Un punto di ordine finito su una varietà abeliana A (definita su un campo di numeri K) è un punto P tale che nP = O per qualche n ≥ 1, dove O denota l'elemento neutro della legge di gruppo abeliano su A e nP denota la somma di P con se stesso n volte.

Il teorema di Mordell-Weil afferma che il gruppo A(K) dei punti K-razionali su una varietà abeliana A è finitamente generato. Questo significa che A(K) ≅ A(K)_tors × Z^r, dove A(K)_tors è il sottogruppo finito dei punti di torsione (ordine finito) e r è un intero non negativo chiamato rango di A su K. I punti di torsione sono gli analoghi dei punti preperiodici, e il teorema di Mordell-Weil fornisce una struttura molto precisa al gruppo dei punti razionali.

La congettura di Bogomolov originale, formulata per varietà abeliane, afferma che i punti di altezza canonica piccola sono essenzialmente punti di torsione. Più precisamente, sia A una

varietà abeliana definita su un campo di numeri K, dotata di una polarizzazione (una divisor ample) che induce un'altezza canonica $\hat{h}$. Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che se $P \in A(K)$ con $\hat{h}(P) < \varepsilon$, allora P è un punto di torsione. Questa versione della congettura fu dimostrata da Emmanuel Ullmo nel 1998 usando metodi della geometria aritmetica e della teoria dell'intersezione.

Il teorema di Ullmo utilizza il fatto che per varietà abeliane, l'altezza canonica può essere espressa in termini di forme quadratiche sulla componente libera di torsione del gruppo di Mordell-Weil. Questa forma quadratica ha proprietà di positività che permettono di dedurre limiti inferiori per punti non di torsione. La dimostrazione sfrutta anche la teoria dei moduli delle varietà abeliane e proprietà della compattificazione toroidale di questi spazi di moduli.

La generalizzazione di Zhang del teorema di Ullmo a mappe razionali sulla retta proiettiva richiede tecniche diverse, poiché non c'è una struttura di gruppo su P^1. Invece, Zhang utilizza la struttura dinamica indotta dalla mappa φ e costruisce un analogo della forma quadratica di altezza usando la teoria dell'intersezione dinamica. Questo approccio ha aperto nuove direzioni di ricerca e ha portato a generalizzazioni ulteriori a varietà di dimensione superiore dotate di endomorfismi polarizzati.

Un esempio concreto che illumina queste idee astratte è la mappa quadratica $\varphi(z) = z^2$. Per questa mappa, i punti preperiodici sono ben compresi: il punto zero è un punto fisso ($\varphi(0) = 0$), il punto infinito è anche un punto fisso, e le radici dell'unità diverse da uno sono tutti preperiodici (eventuamente dopo un numero finito di iterazioni). Più precisamente, se ζ è una radice dell'unità primitiva di ordine n, allora $\varphi^k(\zeta)$ è ancora una radice dell'unità per ogni k, e la sequenza si stabilizza sui punti fissi zero o infinito dopo un numero finito di passi.

Per punti algebrici α che non sono preperiodici per $\varphi(z) = z^2$, l'altezza canonica $\hat{h}_\varphi(\alpha)$ è strettamente positiva, e la congettura di Bogomolov garantisce un limite inferiore uniforme (dipendente dal campo di numeri contenente α). Calcolare questo limite esplicitamente è difficile, e stime precise richiedono analisi dettagliata della geometria della mappa e delle proprietà aritmetiche dei campi coinvolti.

La dinamica sulla retta proiettiva può anche essere studiata usando coordinate non archimedee. Fissato un numero primo p, possiamo considerare l'estensione p-adica C_p dei numeri p-adici (analoga al campo dei numeri complessi ma costruita usando completamento p-adico invece che archimedeo). Mappe razionali $\varphi: P^1 \to P^1$ definite su $\bar{\mathbb{Q}}$ possono essere estese a mappe su $P^1(C_p)$, e possiamo studiare la dinamica p-adica.

La teoria della dinamica p-adica ha visto sviluppi significativi negli ultimi decenni. Lo Julia set p-adico e il Fatou set p-adico sono analoghi degli oggetti classici nella dinamica complessa, ma hanno proprietà topologiche molto diverse dovute alla struttura ultramétrica dello spazio p-adico. Robert Benedetto ha sviluppato una teoria delle altezze canoniche p-adiche che parallela la teoria archimedea, e ha dimostrato versioni p-adiche di molti risultati classici.

Un fenomeno interessante è che le proprietà aritmetiche di un punto possono essere studiate simultaneamente in tutti i posti (archimedei e non archimedei) usando il principio del prodotto. La formula del prodotto in teoria dei numeri afferma che per ogni elemento non nullo α in un campo di numeri K, il prodotto $\prod_v |\alpha|_v = 1$, dove il prodotto è su tutti i posti v

di K e le norme sono opportunamente normalizzate. Questo vincolo collega il comportamento archimedeo e non archimedeo di α.

Applicazioni, generalizzazioni e connessioni interdisciplinari

Il problema di Mahler e la teoria delle altezze canoniche non sono semplicemente questioni isolate di interesse puramente teorico, ma hanno ramificazioni profonde che si estendono a numerose aree della matematica contemporanea. Le tecniche sviluppate per studiare la misura di Mahler hanno trovato applicazioni in teoria computazionale dei numeri, crittografia, teoria dei grafi algebrici, teoria delle rappresentazioni e persino in fisica matematica. Esplorare queste connessioni rivela la ricchezza e la centralità del problema di Mahler nel panorama matematico moderno.

Una delle applicazioni più dirette della teoria di Mahler è nella fattorizzazione di polinomi e nel riconoscimento di numeri algebrici. Quando lavoriamo con numeri reali rappresentati in forma decimale finita, è spesso utile determinare se un tale numero è effettivamente un'approssimazione di un numero algebrico di piccolo grado e piccola altezza. L'algoritmo LLL (Lenstra-Lenstra-Lovász), un algoritmo fondamentale per la riduzione di basi di reticoli, può essere utilizzato per riconoscere numeri algebrici trovando relazioni di dipendenza lineare tra potenze del numero candidato.

La misura di Mahler fornisce un criterio per determinare quanto sia probabile che un numero dato sia algebrico. Se un numero reale x ha un'approssimazione razionale p/q eccezionalmente buona (cioè |x - p/q| è molto più piccolo di 1/q^2), allora questo suggerisce che x potrebbe essere algebrico. Il teorema di Liouville e i suoi raffinamenti moderni (teorema di Thue-Siegel-Roth) forniscono limiti superiori sulla qualità delle approssimazioni razionali di numeri algebrici, e questi limiti sono direttamente collegati alla misura di Mahler attraverso la teoria delle altezze.

Il teorema di Roth, dimostrato da Klaus Roth nel 1955 e che gli valse la medaglia Fields, afferma che per ogni numero algebrico irrazionale α e per ogni ε > 0, la disuguaglianza |α - p/q| < 1/q^(2+ε) ha solo finitamente molte soluzioni razionali p/q. Questo risultato è ottimale nel senso che l'esponente 2 + ε non può essere migliorato a 2 in generale, come dimostrato dall'esistenza di numeri di Liouville che possono essere approssimati arbitrariamente bene da razionali.

La connessione con la misura di Mahler emerge quando consideriamo che la qualità delle approssimazioni diofantee è legata all'altezza del numero algebrico. Numeri con altezza piccola (equivalentemente, misura di Mahler vicina a uno) possono avere approssimazioni razionali migliori rispetto a numeri con altezza grande. Questa relazione è stata sfruttata in algoritmi per il calcolo efficiente di approssimazioni razionali e per la risoluzione di equazioni diofantee.

In crittografia, la sicurezza di molti sistemi dipende dalla difficoltà di risolvere certi problemi computazionali legati alla teoria dei numeri. Il problema del logaritmo discreto, che è alla base della sicurezza di molti protocolli crittografici, può essere formulato in termini di trovare

elementi di ordine grande in gruppi moltiplicativi. La teoria di Mahler fornisce strumenti per stimare l'ordine di elementi in questi gruppi e per identificare elementi con proprietà speciali che potrebbero renderli inadatti per applicazioni crittografiche.

Per esempio, numeri algebrici con misure di Mahler particolarmente piccole potrebbero corrispondere a elementi di ordine relativamente piccolo in certi gruppi moltiplicativi, riducendo lo spazio di ricerca per attacchi brute-force. Comprendere la distribuzione delle misure di Mahler aiuta i crittografi a selezionare parametri che garantiscano sicurezza adeguata. Analogamente, nella teoria dei codici correttori di errori, costruzioni basate su corpi finiti e estensioni algebriche richiedono la selezione di elementi con proprietà aritmetiche appropriate, e la teoria delle altezze fornisce strumenti per questa selezione.

La teoria dei grafi algebrici fornisce un'altra applicazione sorprendente. I grafi espansori sono grafi sparsi con forti proprietà di connettività, e hanno applicazioni in informatica teorica, teoria della complessità e teoria dell'informazione. Certe costruzioni di grafi espansori utilizzano azioni di gruppi su insiemi finiti, e le proprietà di espansione sono legate agli autovalori della matrice di adiacenza del grafo. I numeri di Pisot e i numeri di Salem, che sono strettamente collegati alla misura di Mahler, appaiono come autovalori di grafi espansori ottimali (grafi di Ramanujan).

Più precisamente, un grafo k-regolare (dove ogni vertice ha esattamente k vicini) è detto grafo di Ramanujan se tutti i suoi autovalori non banali λ soddisfano $|\lambda| \leq 2\sqrt{(k-1)}$. Questa condizione fornisce la migliore espansione possibile per grafi k-regolari secondo il bound di Alon-Boppana. Lubotzky, Phillips e Sarnak costruirono esplicitamente famiglie infinite di grafi di Ramanujan usando forme modulari e teoria delle rappresentazioni, e i loro costrutti coinvolgono numeri algebrici le cui misure di Mahler sono correlate ai parametri dei grafi.

La teoria delle rappresentazioni di algebre e gruppi ha connessioni profonde con la teoria di Mahler attraverso lo studio delle matrici algebriche. Consideriamo una matrice A con elementi algebrici. Gli autovalori di A sono radici del polinomio caratteristico $\det(A - \lambda I)$, e la misura di Mahler del polinomio caratteristico è legata allo spettro della matrice. Per matrici che rappresentano operatori in spazi di dimensione finita su campi di numeri, la distribuzione delle misure di Mahler degli autovalori fornisce informazioni sulla struttura della rappresentazione.

In particolare, per rappresentazioni unitarie di gruppi compatti, tutti gli autovalori hanno modulo uno, quindi la misura di Mahler è essenzialmente determinata dal numero di autovalori. Per rappresentazioni di gruppi discreti come $SL(n,Z)$, gli autovalori possono essere numeri di Pisot-Vijayaraghavan o numeri di Salem, riflettendo la presenza di direzioni di espansione e contrazione nella dinamica del gruppo. Lo studio di queste misure ha applicazioni alla teoria ergodica delle azioni di gruppi e alla geometria degli spazi di moduli.

La fisica matematica fornisce un contesto ancora più sorprendente per l'apparizione della misura di Mahler. Nella meccanica statistica e nella teoria dei sistemi integrabili, certe funzioni di partizione e soluzioni esatte di modelli sono espresse in termini di prodotti infiniti e serie che coinvolgono numeri algebrici. La misura di Mahler di questi numeri è correlata alle proprietà termodinamiche del sistema, come l'entropia e l'energia libera.

Per esempio, nel modello di Ising bidimensionale, un modello paradigmatico della meccanica statistica, la funzione di partizione può essere espressa in termini di determinanti di matrici di trasferimento. Gli autovalori di queste matrici sono numeri algebrici, e la loro misura di Mahler contribuisce all'energia libera del sistema. Lars Onsager, nella sua soluzione esatta del modello di Ising su reticolo quadrato, derivò formule che coinvolgono funzioni ellittiche e integrali ellittici, e questi oggetti analitici hanno parametri algebrici le cui altezze sono rilevanti per l'analisi.

In teoria delle stringhe e teoria dei campi quantistici, le ampiezze di scattering e le funzioni di correlazione sono spesso espresse come integrali su spazi di moduli di curve algebriche o superfici di Riemann. Le coordinate di Teichmüller su questi spazi di moduli sono parametrizzate da numeri che possono essere algebrici in casi speciali, e lo studio delle loro altezze ha implicazioni per la struttura delle teorie quantistiche. La congettura di Kontsevich sulla quantizzazione della teoria di Chern-Simons, per esempio, coinvolge invarianti che sono collegati a valori speciali di funzioni zeta e a numeri algebrici di altezza controllata.

La teoria dei numeri trascendenti moderna ha visto progressi significativi nell'applicazione di tecniche dalla misura di Mahler a problemi classici sulla trascendenza e l'indipendenza algebrica di costanti matematiche. Il settimo problema di Hilbert, risolto da Gelfond e Schneider negli anni trenta, chiede se α^β sia trascendente quando α è algebrico diverso da zero e uno, e β è algebrico irrazionale. La risposta affermativa (teorema di Gelfond-Schneider) è stata ottenuta usando metodi che anticipavano tecniche moderne della teoria delle altezze.

Generalizzazioni del teorema di Gelfond-Schneider, come la congettura di Schanuel, rimangono tra i problemi aperti più importanti della matematica. La congettura di Schanuel afferma che se z_1, ..., z_n sono numeri complessi linearmente indipendenti su Q, allora il grado di trascendenza di Q(z_1, ..., z_n, e^(z_1), ..., e^(z_n)) è almeno n. Se dimostrata, questa congettura implicherebbe molti risultati desiderati sulla trascendenza, inclusa la trascendenza di e + π, e × π, e^π, π^e e molte altre costanti.

La connessione con la misura di Mahler è che tecniche simili sono utilizzate per studiare entrambi i problemi. La costruzione di polinomi ausiliari con proprietà diofantee controllate, l'applicazione del principio del cassetto a spazi di polinomi di dimensione opportuna, e l'uso di stime su norme di polinomi valutati in punti algebrici sono comuni a entrambe le aree. Progressi nell'una spesso suggeriscono approcci nell'altra, creando una fertilizzazione incrociata produttiva.

Michel Waldschmidt e altri hanno sviluppato una teoria unificata che comprende sia i risultati di trascendenza classici che le stime sulla misura di Mahler. Questa teoria utilizza il concetto di misure di indipendenza lineare e di gradi di trascendenza relativi per quantificare quanto numeri dati siano lontani dall'essere algebricamente dipendenti. La misura di Mahler appare come un caso speciale di queste misure più generali, corrispondente al caso di dipendenza moltiplicativa di grado uno.

La geometria aritmetica su varietà di dimensione superiore fornisce ulteriori generalizzazioni. Consideriamo una varietà proiettiva X su un campo di numeri K, dotata di un divisor ample L che definisce un'altezza h_L sui punti razionali X(K). La congettura di Lang (Paul Vojta ha formulato una versione più precisa) prevede l'esistenza di proprietà di lacuna simili a quelle

della congettura di Bogomolov per punti di altezza piccola che non giacciono in sottovarietà speciali.

Più precisamente, la congettura di Vojta afferma che per una varietà X di tipo generale (una condizione tecnica che generalizza il genere positivo per curve), esiste un insieme eccezionale Σ di sottovarietà proprie di X tale che punti in X(K) con altezza sufficientemente piccola devono giacere in Σ. Questa congettura, se vera, unificherebbe molti risultati profondi in geometria diofantea, inclusi la congettura abc (ora teorema di Mochizuki secondo alcuni, anche se la dimostrazione rimane controversa), la congettura di Mordell (dimostrata da Gerd Faltings) e molti altri.

La misura di Mahler appare nel contesto della congettura di Vojta quando specializziamo a curve e mappiamo le altezze su curve ellittiche alle misure di Mahler attraverso funzioni di Weierstrass e parametrizzazioni di tori complessi. Le curve ellittiche, essendo varietà abeliane di dimensione uno, hanno una teoria delle altezze particolarmente ricca che si collega direttamente alla teoria di Mahler per numeri algebrici.

Un'applicazione concreta della teoria di Mahler è nel calcolo simbolico e nella verifica formale. Sistemi di algebra computazionale come Mathematica, Maple e Sage devono spesso determinare se due espressioni algebriche sono uguali, anche quando queste espressioni coinvolgono radicali annidati, potenze frazionarie e operazioni algebriche complesse. La misura di Mahler fornisce un modo per stimare la complessità di numeri algebrici e per scegliere rappresentazioni efficienti.

Per esempio, quando semplifichiamo un'espressione come $\sqrt{(2 + \sqrt{3})}$, potremmo voler determinare se questa è uguale a qualche espressione più semplice come $(\sqrt{6} + \sqrt{2})/2$. Calcolando le misure di Mahler (o altezze equivalenti) delle due espressioni e verificando se coincidono, possiamo ottenere evidenza forte dell'uguaglianza o disuguaglianza. Algoritmi basati su LLL e su calcolo di relazioni algebriche utilizzano implicitamente stime di altezze per determinare la verosimiglianza che certi numeri siano algebricamente correlati.

La teoria dei campi finiti e la geometria su corpi finiti hanno anche connessioni con la misura di Mahler attraverso analogie funzionali. Consideriamo il campo funzionale $F_q(t)$, dove F_q è il campo finito con q elementi e t è una variabile indeterminata. Possiamo definire una nozione di altezza per elementi di estensioni algebriche di $F_q(t)$ in modo analogo all'altezza per numeri algebrici, usando il grado del polinomio minimo invece della misura moltiplicativa.

David Goss, Dinesh Thakur e altri hanno sviluppato un'estesa teoria dei numeri per campi funzionali che parallela la teoria classica per numeri algebrici. La misura di Mahler ha un analogo in questo contesto, e molti risultati classici (incluso il limite di Dobrowolski) hanno versioni nel setting funzionale. Sorprendentemente, alcuni problemi che sono aperti per numeri algebrici sono stati risolti per i loro analoghi funzionali, fornendo indicazioni sulle possibili strutture delle dimostrazioni nel caso classico.

Un esempio è la congettura di Manin-Mumford, che afferma che una curva algebrica di genere almeno due definita su un campo di numeri ha solo finitamente molti punti di torsione quando embedded in una varietà abeliana (la sua Jacobiana). Questa congettura fu dimostrata da Michel Raynaud nel 1983 per il caso dei numeri, ma versioni funzionali erano

già state stabilite precedentemente usando tecniche differenti. Le tecniche funzionali hanno poi ispirato approcci nel caso dei numeri.

La teoria dei grafi con pesi algebrici rappresenta un'altra direzione di applicazione. Consideriamo un grafo i cui archi sono pesati con numeri algebrici, e chiediamo proprietà del cammino di peso minimo o di altre quantità computabili dal grafo. Se i pesi hanno altezze controllate, possiamo ottenere limiti sulla complessità bit-wise degli algoritmi necessari per rispondere a queste domande. La teoria di Mahler fornisce strumenti per stimare queste complessità e per progettare algoritmi efficienti.

In ottimizzazione combinatoria e ricerca operativa, problemi di programmazione lineare intera con coefficienti algebrici richiedono metodi speciali per gestire l'aritmetica esatta necessaria. L'algoritmo del simplesso e metodi di punti interni devono affrontare questioni di stabilità numerica quando i dati del problema coinvolgono numeri algebrici. Stime di altezza e misure di Mahler permettono di determinare a priori la precisione aritmetica necessaria per garantire risultati corretti.

La topologia algebrica e la K-teoria hanno connessioni sorprendenti con la teoria di Mahler attraverso lo studio di invarianti numerici di spazi topologici. Il polinomio di Alexander di un nodo, per esempio, è un invariante che può essere calcolato da una presentazione del gruppo fondamentale del complemento del nodo. Le radici del polinomio di Alexander sono numeri algebrici, e in molti casi sono numeri di Pisot o Salem, riflettendo proprietà geometriche e topologiche del nodo.

L'entropia topologica di automorfismi di varietà compatte può essere espressa in termini della misura di Mahler del polinomio caratteristico dell'azione indotta su omologia. Yosef Yomdin e altri hanno studiato questa connessione, derivando limiti inferiori sull'entropia da proprietà aritmetiche degli autovalori. Queste tecniche hanno applicazioni allo studio della complessità di sistemi dinamici e alla teoria ergodica algebrica.

Tecniche di dimostrazione, metodi ausiliari e approcci moderni

Le dimostrazioni dei risultati principali nella teoria della misura di Mahler e nelle altezze canoniche richiedono una sintesi sofisticata di tecniche da diverse aree della matematica. Comprendere questi metodi non solo illumina i risultati stessi, ma fornisce anche intuizioni su come la matematica moderna affronta problemi di grande complessità attraverso l'integrazione creativa di idee apparentemente disparate. In questa sezione, esploreremo in dettaglio le principali tecniche dimostrative utilizzate nello studio del problema di Mahler, dalla costruzione di polinomi ausiliari alle applicazioni della geometria aritmetica moderna.

La tecnica centrale in quasi tutte le dimostrazioni rilevanti è la costruzione di polinomi ausiliari con proprietà diofantee controllate. Questa idea, che risale ai lavori pioneristici di Liouville e Hermite nel diciannovesimo secolo, è stata raffinata e generalizzata enormemente nel ventesimo secolo. L'approccio generale consiste nel supporre per assurdo che un certo numero algebrico α abbia una proprietà indesiderata (per esempio, che la sua misura di Mahler sia troppo piccola), e poi costruire un polinomio ausiliario $P(x)$ che ha α

come radice di molteplicità alta ma che simultaneamente ha coefficienti interi piccoli e valore piccolo in punti specifici.

La costruzione di tali polinomi utilizza tipicamente il principio del cassetto (pigeonhole principle) applicato a spazi vettoriali di polinomi. Consideriamo lo spazio vettoriale V di tutti i polinomi di grado al più N con coefficienti interi compresi tra -H e H per un certo bound H che sceglieremo opportunamente. La dimensione di questo spazio come insieme è circa (2H + 1)^(N+1), un numero molto grande quando H ed N sono grandi. Vogliamo trovare un polinomio non nullo in questo spazio che soddisfi certe condizioni di annullamento.

Supponiamo di richiedere che il polinomio P si annulli in α con molteplicità almeno M, cioè P(α) = P'(α) = ... = P^(M-1)(α) = 0. Queste sono M condizioni lineari sui coefficienti di P. Se possiamo mostrare che il numero di condizioni M è strettamente minore della dimensione dello spazio V, allora per il principio del cassetto deve esistere un polinomio non nullo che soddisfa tutte le condizioni. La chiave è scegliere i parametri N, H, M in modo da bilanciare queste esigenze contrastanti.

Una volta costruito il polinomio ausiliario P, dobbiamo derivare proprietà che portino a una contraddizione. Ci sono diverse strategie per fare questo. Una approccio classico utilizza il lemma di Siegel, che fornisce stime quantitative sull'esistenza di soluzioni non banali a sistemi lineari omogenei con più incognite che equazioni. Il lemma di Siegel afferma che se abbiamo un sistema di M equazioni lineari omogenee in N incognite con coefficienti interi limitati in modulo da B, e se N > M, allora esiste una soluzione non banale con coordinate intere limitate in modulo da circa (NB)^(M/(N-M)).

Applicando il lemma di Siegel al sistema di equazioni che esprime le condizioni di annullamento P^(k)(α) = 0 per k = 0, ..., M-1, otteniamo l'esistenza di un polinomio P con coefficienti limitabili in termini di N, M e delle altezze di α. Dobbiamo poi stimare quanto può essere piccolo |P| in norma (per esempio, la norma sup dei coefficienti o una norma L^2 appropriata) e confrontare questa stima con limiti inferiori derivabili dalle proprietà aritmetiche di α.

Un strumento cruciale per ottenere limiti inferiori è il principio di Liouville in forma generalizzata. Se P(x) è un polinomio a coefficienti interi non nullo e se α è un numero algebrico, allora |P(α)| può essere stimato inferiormente in termini del grado di α e dell'altezza di P. Specificamente, se P non è divisibile per il polinomio minimo di α, allora |P(α)| ≥ c × H^(-d), dove H è l'altezza di P, d è il grado di α, e c è una costante che dipende da α ma non da P. Questa stima riflette il fatto che un polinomio non nullo a coefficienti interi non può assumere valori razionali arbitrariamente piccoli in numeri algebrici.

Tuttavia, se P ha α come radice di molteplicità M, allora P(α) = 0 esattamente, e questa stima non si applica direttamente. Invece, dobbiamo considerare derivate di P. Se P^(M)(α) è la prima derivata non nulla, possiamo applicare la stima di Liouville a P^(M)/M! (che è ancora un polinomio con coefficienti razionali, anche se non necessariamente interi). Le derivate successive introducono fattori fattoriali che devono essere gestiti con cura nelle stime.

La disuguaglianza di Jensen, uno strumento fondamentale dall'analisi complessa, gioca un ruolo importante in molte dimostrazioni. Per una funzione olomorfa f(z) non nulla in un disco

di raggio R centrato nell'origine, la disuguaglianza di Jensen collega la media logaritmica di |f| sul bordo del disco alle posizioni e molteplicità degli zeri all'interno. Precisamente, se f ha zeri in z_1, ..., z_k (contati con molteplicità) dentro il disco di raggio R, allora (1/2π) ∫_0^(2π) log|f(Re^(iθ))| dθ = log|f(0)| + Σ_j log(R/|z_j|).

Applicando la disuguaglianza di Jensen al polinomio ausiliario P, possiamo relazionare la misura di Mahler di P (che coinvolge un integrale simile sul cerchio unitario) alla molteplicità degli zeri in α e ad altre proprietà del polinomio. Se α ha modulo vicino a uno e P ha α come zero di molteplicità alta, la disuguaglianza di Jensen fornisce limitazioni sulla possibile dimensione dei coefficienti di P, portando alla contraddizione desiderata quando combinata con stime dal lemma di Siegel.

La teoria dell'approssimazione diofantea fornisce un altro set di strumenti essenziali. Il teorema di Thue-Siegel-Roth, già menzionato, afferma che numeri algebrici irrazionali non possono essere approssimati troppo bene da razionali. Versioni quantitative di questo teorema, note come stime esplicite di approssimazione, forniscono bounds numerici sui denominatori delle approssimazioni razionali in termini dell'errore di approssimazione.

Edward Wirsing, Wolfgang Schmidt e altri hanno sviluppato versioni multidimensionali del teorema di Roth, nota come teorema del sottospazio di Schmidt. Questo teorema afferma che se α_1, ..., α_n sono numeri algebrici linearmente indipendenti su Q, allora per ogni ε > 0, la disuguaglianza |x_0 + x_1α_1 + ... + x_nα_n| < H^(-(n+ε)) ha solo finitamente molte soluzioni in interi (x_0, ..., x_n) con altezza max|x_i| = H. Questo risultato ha applicazioni alla distribuzione di punti algebrici e alla struttura di reticoli in spazi numerici.

La geometria dei numeri, fondata da Hermann Minkowski alla fine del diciannovesimo secolo, fornisce metodi per studiare proprietà di reticoli (sottogruppi discreti di spazi vettoriali reali) usando geometria euclidea. Il teorema di Minkowski sui corpi convessi afferma che se K è un corpo convesso simmetrico in R^n con volume maggiore di 2^n volte il determinante di un reticolo Λ, allora K contiene un punto non nullo di Λ. Questo teorema ha applicazioni profonde alla teoria algebrica dei numeri e alla teoria delle forme quadratiche.

Nel contesto della misura di Mahler, la geometria dei numeri appare quando consideriamo il reticolo formato dai coniugati di numeri algebrici in un campo di numeri. Se α_1, ..., α_n sono i coniugati di un numero algebrico α (cioè le radici del suo polinomio minimo), possiamo considerare il punto (α_1, ..., α_n) in C^n. Le proprietà geometriche di questo punto, come la sua norma e la sua distanza da certi sottospazi, sono collegate alla misura di Mahler di α.

L'embedding logaritmico, che mappa un numero algebrico α al vettore (log|σ_1(α)|, ..., log|σ_n(α)|) dove σ_1, ..., σ_n sono gli embedding del campo Q(α) in C, trasforma problemi moltiplicativi in problemi additivi più trattabili. In questo spazio logaritmico, il gruppo moltiplicativo dei numeri algebrici diventa un gruppo additivo, e la misura di Mahler corrisponde essenzialmente alla norma L^∞ del vettore logaritmico (dopo appropriate normalizzazioni).

Il teorema delle unità di Dirichlet, formulato e dimostrato da Peter Gustav Lejeune Dirichlet nel 1846, descrive la struttura del gruppo delle unità in un anello di interi algebrici. Questo teorema afferma che per un campo di numeri K di grado n con r_1 posti reali e r_2 coppie di

posti complessi (quindi n = r_1 + 2r_2), il gruppo delle unità è isomorfo a μ_K × Z^(r_1+r_2-1), dove μ_K è il gruppo finito delle radici dell'unità in K. Il teorema fornisce anche un metodo costruttivo per trovare un sistema fondamentale di unità, anche se il calcolo effettivo può essere computazionalmente intensivo.

Le unità fondamentali hanno misure di Mahler controllabili in termini del discriminante del campo e di altre invarianti geometriche. Il regolatore del campo di numeri K, definito come il volume del parallelepipedo fondamentale generato dalle unità fondamentali nello spazio logaritmico, è collegato alla misura di Mahler attraverso formule che coinvolgono la funzione zeta di Dedekind del campo. Queste connessioni permettono di stimare distribuzioni di misure di Mahler usando metodi dalla teoria analitica dei numeri.

La teoria delle funzioni L e dei caratteri di Hecke fornisce strumenti potenti per studiare proprietà statistiche di numeri algebrici. La funzione zeta di Dedekind ζ_K(s) di un campo di numeri K generalizza la funzione zeta di Riemann e codifica informazioni sulla distribuzione di ideali primi nel campo. La funzione zeta ha una relazione profonda con il regolatore e la misura di Mahler attraverso la formula del numero di classe e sue generalizzazioni.

La formula del numero di classe, nella sua forma classica per campi quadratici, collega il numero di classe h (il numero di classi di ideali nel gruppo di classi), il regolatore R e il discriminante D del campo attraverso una formula che coinvolge la funzione zeta. Per campi generali, la formula diventa più complicata ma mantiene la stessa struttura essenziale. Stimare il numero di classe e il regolatore è un problema computazionalmente difficile, ma limiti asintotici possono essere derivati usando la congettura di Riemann generalizzata e tecniche analitiche.

La teoria dell'intersezione aritmetica, sviluppata da Gerd Faltings, Gillet, Soulé e altri negli anni ottanta, generalizza la teoria dell'intersezione classica in geometria algebrica al contesto aritmetico. In geometria algebrica classica, la teoria dell'intersezione studia come sottovarietà di una varietà si intersecano, definendo numeri di intersezione che quantificano la molteplicità dell'intersezione. Nel contesto aritmetico, lavoriamo su varietà definite su campi di numeri o anelli di interi, e dobbiamo tenere conto di informazioni da tutti i posti (finiti e infiniti).

La teoria di Arakelov, proposta da Suren Arakelov nel 1974 e sviluppata estensivamente da Faltings, Deligne e altri, fornisce un framework geometrico per studiare proprietà aritmetiche di varietà. L'idea centrale è compattificare varietà aritmetiche aggiungendo "fibre all'infinito" che corrispondono ai posti archimedei. Su queste varietà compattificate, possiamo definire metriche hermitiane e sviluppare una teoria dell'intersezione che tiene conto sia delle contribuzioni finite che infinite.

Nel contesto della misura di Mahler e delle altezze canoniche, la teoria di Arakelov permette di definire altezze come gradi di divisori aritmetici. Un divisor aritmetico è un divisor classico dotato di una metrica hermitiana sulle fibre archimedee. Il grado aritmetico di tale divisor generalizza il concetto di altezza, e proprietà di positività dei divisors aritmetici (analoghe a proprietà di ampiezza in geometria algebrica) sono cruciali per derivare limiti inferiori sulle altezze.

Il teorema di Riemann-Roch aritmetico, dimostrato da Faltings, Gillet e Soulé, è un risultato profondo che generalizza il teorema di Riemann-Roch classico al contesto aritmetico. Questo teorema esprime la caratteristica di Euler aritmetica di un divisor in termini del suo grado aritmetico e di termini correttivi che coinvolgono classi caratteristiche (classi di Chern aritmetiche). Il teorema ha applicazioni immediate alla teoria delle altezze, fornendo formule per calcolare altezze di punti e per studiare la loro distribuzione.

Nella dimostrazione della congettura di Bogomolov da parte di Zhang, il teorema di Riemann-Roch aritmetico gioca un ruolo centrale. Zhang costruisce una fibrazione su uno spazio di moduli opportuno, dotata di una metrica hermitiana naturale che codifica l'altezza canonica dinamica. Applicando il teorema di Riemann-Roch aritmetico a divisors appropriati su questa fibrazione, Zhang deriva stime sulla funzione di altezza che permettono di dedurre il limite inferiore desiderato per punti non preperiodici.

La tecnica di equidistribuzione, sviluppata da Laurent Clozel, Emmanuel Ullmo, Andrei Yafaev, Shou-Wu Zhang e altri, fornisce un approccio potente per studiare distribuzioni di punti algebrici di altezza limitata. L'idea centrale è mostrare che quando consideriamo sequenze di punti algebrici con altezza tendente a zero (o tendente all'infinito, dopo opportuna normalizzazione), le misure discrete associate a questi punti convergono a misure naturali sulla varietà.

Per curve modulari e varietà di Shimura, che sono varietà con ricca struttura aritmetica derivante da teoria delle forme modulari e rappresentazioni, le misure limite sono tipicamente misure di probabilità con supporto su sottovarietà speciali (come tori o sottovarietà di Hecke). Il teorema di equidistribuzione di Zhang per altezze canoniche afferma che punti di altezza canonica piccola per una mappa razionale sono equidistribuiti rispetto alla misura di equilibrio della mappa.

La dimostrazione di risultati di equidistribuzione utilizza tecniche dalla teoria ergodica, incluso il teorema ergodico di Birkhoff e sue generalizzazioni. L'idea è mostrare che la funzione di altezza, opportunamente normalizzata, si comporta come una funzione invariante per l'azione di un sistema dinamico opportuno, e che le orbite di punti tipici sotto questa azione sono equidistribuite. Trasferire questi risultati ergodici al contesto aritmetico richiede stime delicate e controllo quantitativo su tassi di convergenza.

Un altro strumento importante è la teoria dei campi di classi, che descrive estensioni abeliane di campi di numeri in termini di gruppi di ideali. Il teorema principale della teoria dei campi di classi stabilisce un isomorfismo canonico tra il gruppo di Galois dell'estensione abeliana massimale di un campo di numeri K e il gruppo di classi di ideali di K (opportunamente completato). Questa corrispondenza ha conseguenze profonde per lo studio di equazioni diofantee e per la comprensione della struttura delle estensioni algebriche.

Nel contesto della misura di Mahler, la teoria dei campi di classi appare quando studiamo la distribuzione di numeri algebrici in estensioni abeliane. Punti di ordine finito (o più generalmente, punti preperiodici) su varietà abeliane corrispondono a punti definiti su estensioni abeliane del campo base, e la teoria dei campi di classi fornisce strumenti per enumerare e classificare tali punti. Le stime risultanti sulle densità di punti sono utili per comprendere la distribuzione globale delle misure di Mahler.

Problemi aperti, direzioni future e riflessioni conclusive

Dopo aver esplorato in profondità la teoria della misura di Mahler, le sue connessioni con la dinamica aritmetica e le numerose tecniche matematiche coinvolte, è appropriato riflettere sulle questioni ancora irrisolte, sulle direzioni promettenti per la ricerca futura e sul significato più ampio di questa area di indagine per la matematica contemporanea. Il problema di Mahler, nonostante quasi ottanta anni di intenso studio, continua a resistere a una risoluzione completa, e le sfide che presenta illuminano i limiti attuali della nostra comprensione matematica.

La questione centrale che rimane aperta è, naturalmente, la congettura di Mahler originale: esiste una costante universale $c > 1$ tale che $M(\alpha) \geq c$ per ogni numero algebrico α che non sia zero né radice dell'unità? Come abbiamo visto, il limite di Dobrowolski fornisce un bound che dipende dal grado del numero algebrico, $M(\alpha) \geq 1 + c_0/(d(\log 3d)^3)$, dove d è il grado di α e c_0 è una costante assoluta. Miglioramenti successivi hanno affinato la dipendenza logaritmica, ma nessuno è riuscito a eliminare completamente la dipendenza dal grado.

La difficoltà fondamentale nel provare un limite uniforme risiede nell'esistenza di sequenze di numeri algebrici i cui gradi crescono all'infinito mentre le loro misure di Mahler tendono a uno. I numeri di Salem forniscono esempi concreti: per ogni $\varepsilon > 0$, esistono numeri di Salem θ con $M(\theta) = \theta < 1 + \varepsilon$. Questi numeri hanno gradi arbitrariamente grandi, e dimostrano che qualunque limite inferiore uniforme deve essere molto vicino a uno. La questione è se debba essere esattamente uno (cioè se la congettura sia falsa) o se esista un gap positivo per quanto piccolo.

Un approccio promettente per risolvere la congettura di Mahler potrebbe venire dalla teoria ergodica e dai sistemi dinamici. Se potessimo dimostrare che l'insieme dei numeri algebrici di misura di Mahler inferiore a qualunque $c > 1$ ha una certa struttura "rarefatta" dal punto di vista della misura o della dimensione, questo potrebbe portare a una contraddizione. Per esempio, se potessimo mostrare che questo insieme ha dimensione di Hausdorff strettamente minore di quella dell'insieme di tutti i numeri algebrici, o se avesse misura zero rispetto a qualche misura naturale, questo fornirebbe evidenza forte per la congettura.

La connessione con la dinamica simbolica potrebbe anche essere fruttuosa. I numeri di Pisot e Salem possono essere caratterizzati in termini di proprietà delle loro espansioni in beta-base, dove una beta-base usa un numero algebrico $\beta > 1$ come base invece di un intero. Charles Pisot dimostrò che un numero $\beta > 1$ è un numero di Pisot se e solo se ogni intero positivo ha un'espansione in beta-base eventualmente periodica. Klaus Schmidt e altri hanno studiato le proprietà ergodiche di trasformazioni associate a beta-espansioni, e questi studi potrebbero illuminare la distribuzione delle misure di Mahler.

Un altro problema aperto importante riguarda la computazione effettiva della misura di Mahler. Dato un numero algebrico α specificato come radice di un polinomio, quanto è difficile calcolare $M(\alpha)$ con precisione arbitraria? Per numeri di piccolo grado, questo è computazionalmente fattibile usando metodi numerici standard per trovare radici di polinomi e poi calcolando il prodotto dei massimi dei moduli. Tuttavia, per numeri di grado molto grande, la questione diventa non banale.

La complessità bit del calcolo della misura di Mahler è di interesse teorico e pratico. Se il grado del numero algebrico è d e i coefficienti del suo polinomio minimo hanno dimensione binaria al più L, allora quanto tempo è necessario per calcolare M(α) con n bit di precisione? Algoritmi naive richiedono tempo polinomiale in d, L e n, ma potrebbero esistere algoritmi più efficienti sfruttando strutture speciali. La teoria della complessità algebrica fornisce framework per studiare tali questioni.

La distribuzione statistica delle misure di Mahler è un'altra area ricca di problemi aperti. Se scegliamo polinomi a caso secondo qualche distribuzione naturale (per esempio, coefficienti uniformi in un intervallo), quale è la distribuzione risultante delle misure di Mahler? Chris Smyth ha congetturato che la misura di Mahler logaritmica di un polinomio casuale di grado d con coefficienti in [-H, H] è approssimativamente normale (gaussiana) con media proporzionale a d log H e varianza proporzionale a d (log H)^2.

Questa congettura, se vera, avrebbe implicazioni per la probabilità che polinomi casuali abbiano misure di Mahler eccezionalmente piccole. Specificatamente, suggerirebbe che la probabilità che un polinomio casuale di grado d abbia M(P) < c è esponenzialmente piccola in d per qualunque c > 1 fissato. Dimostrare risultati in questa direzione richiederebbe tecniche dalla teoria della probabilità, dall'analisi armonica e dallo studio di polinomi ortogonali.

La generalizzazione del problema di Mahler a dimensioni superiori presenta sfide e opportunità ulteriori. Per varietà algebriche di dimensione maggiore di zero, possiamo definire nozioni di altezza che generalizzano la misura di Mahler. Per una varietà proiettiva X dotata di un divisor ample L, l'altezza di un punto $x \in X$ è definita usando gradi di divisors aritmetici. La congettura di Bogomolov per varietà generali chiede se esista un gap positivo tra l'altezza zero e tutte le altre altezze positive, almeno per punti che non giacciono in sottovarietà speciali.

La dimostrazione della congettura di Bogomolov per curve (dimensione uno) e varietà abeliane è stata completata, ma per varietà generali di tipo generale (una condizione tecnica che generalizza il genere positivo) la questione rimane aperta in molti casi. La difficoltà è che le tecniche utilizzate per curve e varietà abeliane sfruttano pesantemente la struttura di gruppo presente in questi casi, e tale struttura non è disponibile per varietà generali. Nuove idee sono necessarie per affrontare il caso generale.

Un approccio promettente per varietà generali utilizza il programma dei modelli minimali in geometria birazionale. Questo programma, sviluppato da Shigefumi Mori, János Kollár, Caucher Birkar e altri, fornisce una classificazione sistematica delle varietà algebriche attraverso una sequenza di operazioni birazionali canoniche. Se potessimo relazionare altezze su una varietà generale alle altezze su modelli minimali o varietà canonicamente più semplici, potremmo trasferire risultati noti da casi più semplici a casi più complicati.

La teoria dei numeri trascendenti continua a essere intimamente connessa al problema di Mahler, e progressi nell'una potrebbero illuminare l'altra. La congettura di Schanuel, già menzionata, rimane uno dei problemi aperti più importanti nella teoria dei numeri trascendenti. Metodi sviluppati per studiare la misura di Mahler, in particolare tecniche di costruzione di polinomi ausiliari e stime di approssimazione diofantea, potrebbero

potenzialmente essere adattati per attaccare aspetti della congettura di Schanuel o di congetture correlate.

Inversamente, se la congettura di Schanuel fosse dimostrata, avrebbe implicazioni per la distribuzione di numeri algebrici e per la struttura dei campi di numeri. Potrebbe fornire nuove limitazioni sulle relazioni algebriche tra numeri con altezze controllate, che a loro volta potrebbero essere tradotte in informazioni sulla distribuzione delle misure di Mahler. Questa interazione bidirezionale tra diverse aree della teoria dei numeri è una caratteristica distintiva della ricerca matematica moderna.

Il problema della uniformità dei limiti nella congettura di Bogomolov è un'altra questione aperta interessante. La congettura afferma che per ogni mappa razionale φ e campo di numeri K, esiste un ε(φ, K) > 0 tale che altezze canoniche di punti non preperiodici in K sono almeno ε(φ, K). Ma possiamo rendere questo limite indipendente di K, almeno per campi di grado limitato? Oppure possiamo dare stime esplicite su come ε(φ, K) dipende da invarianti di φ e K?

Matthew Baker e Robert Rumely hanno studiato varianti non archimedee di queste questioni, considerando altezze canoniche p-adiche e curve di Berkovich (oggetti geometrici che generalizzano varietà algebriche al contesto non archimedeo). Le loro ricerche suggeriscono che versioni uniformi della congettura di Bogomolov potrebbero essere vere sotto ipotesi opportune, e che tecniche dal mondo non archimedeo potrebbero eventualmente essere trasferite al caso archimedeo classico.

La complessità computazionale di determinare se un dato numero algebrico è preperiodico per una mappa razionale è un problema aperto affascinante con applicazioni pratiche. Dato un numero algebrico α e una mappa razionale φ, entrambi specificati da dati finiti, esiste un algoritmo che decide in tempo polinomiale se α è preperiodico per φ? Per mappe specifiche come φ(z) = z^d, questo si riduce a determinare se α è zero o radice dell'unità, un problema risolvibile in tempo polinomiale. Ma per mappe generali, la questione è aperta.

Benjamin Hutz, Patrick Ingram e altri hanno sviluppato algoritmi pratici per verificare la preperiodicità in casi specifici, usando una combinazione di tecniche numeriche e algebriche. Tuttavia, la complessità teorica nel caso peggiore rimane poco compresa. Se la congettura di Bogomolov fornisce un gap esplicito ε(φ, K) e se questo gap è effettivamente calcolabile, allora potremmo determinare la preperiodicità calcolando l'altezza canonica con sufficiente precisione e verificando se è minore di ε(φ, K). Ma il calcolo dell'altezza canonica stessa potrebbe essere computazionalmente costoso.

Le applicazioni crittografiche della teoria delle altezze e della dinamica aritmetica stanno emergendo come un'area di ricerca attiva. Sistemi crittografici basati su curve ellittiche utilizzano già pesantemente la teoria delle altezze per selezionare curve con buone proprietà di sicurezza. Generalizzazioni a mappe razionali di grado superiore potrebbero fornire nuovi primitivi crittografici con proprietà interessanti. Tuttavia, comprendere appieno le proprietà di sicurezza richiede conoscenza dettagliata della distribuzione di punti preperiodici e di altezze canoniche.

Alice Silverberg, Karl Rubin e altri hanno proposto sistemi crittografici basati su varietà abeliane di dimensione superiore, sfruttando la complessità aumentata di queste strutture

per potenzialmente migliorare la sicurezza contro attacchi quantistici. La teoria della misura di Mahler per punti su varietà abeliane, sviluppata attraverso la teoria delle altezze canoniche, fornisce strumenti per analizzare la sicurezza di questi sistemi e per stimare la difficoltà di problemi computazionali sottostanti.

L'interazione tra il problema di Mahler e la fisica teorica, sebbene ancora embrionale, potrebbe rivelarsi fruttuosa. In teoria delle stringhe, le coordinate su spazi di moduli di strutture geometriche (come varietà di Calabi-Yau) sono parametrizzate da numeri che possono essere algebrici in casi speciali. Le altezze di questi numeri sono correlate a quantità fisiche come energie del vuoto e costanti di accoppiamento. Comprendere la distribuzione delle altezze potrebbe illuminare il "paesaggio" delle teorie delle stringhe e la questione della selezione del vuoto.

Nella teoria dei campi quantistici conformi, le dimensioni anomale di operatori sono spesso numeri algebrici determinati da condizioni di consistenza (bootstrap equations). La distribuzione di queste dimensioni anomale e le loro altezze potrebbero essere collegate a proprietà universali delle teorie conformi. Esplorare queste connessioni richiede collaborazione tra matematici puri e fisici teorici, un'interazione che ha storicamente portato a progressi significativi in entrambi i campi.

Dal punto di vista filosofico, il problema di Mahler solleva questioni profonde sulla natura della complessità matematica e sulla struttura dello spazio dei numeri algebrici. Perché dovrebbe esistere un gap tra la misura uno (raggiunta da radici dell'unità) e tutte le altre misure? Questo gap, se esiste, riflette una struttura profonda nella trama dei numeri, o è un artefatto della particolare definizione di misura che abbiamo scelto? Alternative alla misura di Mahler, come la misura di Weil (che usa una media integrale diversa) o misure basate su norme p-adiche, potrebbero rivelare pattern diversi.

La questione della "naturalità" della misura di Mahler è importante. Mentre la definizione $M(\alpha) = \Pi_i \max(1, |\alpha_i|)$ sembra naturale e ha proprietà algebriche eleganti (come la moltiplicatività), altre definizioni potrebbero essere ugualmente naturali da prospettive diverse. Per esempio, potremmo considerare la media geometrica $\Pi_i |\alpha_i|^{(1/d)}$ o la media aritmetica $(1/d) \Sigma_i |\alpha_i|$. Queste definizioni alternative producono teorie diverse con gap differenti o assenza di gap.

Il ruolo della scelta nella matematica è una questione filosofica perenne. Le definizioni che introduciamo (come la misura di Mahler) sono scoperte che rivelano strutture oggettive nel mondo matematico platonico, o sono invenzioni che riflettono particolari interessi e prospettive umane? Il fatto che la misura di Mahler appaia naturalmente in così tanti contesti diversi (dinamica aritmetica, teoria del potenziale, teoria ergodica, fisica matematica) suggerisce che catturi qualcosa di genuinamente importante nella struttura dei numeri algebrici.

L'approccio categoriale alla teoria dei numeri, sviluppato da Yuri Manin, Alexander Grothendieck e la scuola francese di geometria algebrica, fornisce un framework per comprendere oggetti aritmetici (come numeri algebrici, campi di numeri, varietà aritmetiche) in termini di morfismi e funtori piuttosto che elementi individuali. Da questa prospettiva, la misura di Mahler potrebbe essere vista come una caratteristica naturale di certi funtori di

altezza, e l'esistenza o non esistenza di gap potrebbe riflettere proprietà categoriali profonde.

La geometria non commutativa, un campo sviluppato da Alain Connes che generalizza la geometria classica permettendo coordinate che non commutano, potrebbe eventualmente offrire nuove prospettive sul problema di Mahler. In geometria non commutativa, spazi classici sono rimpiazzati da algebre non commutative, e nozioni geometriche come dimensione, volume e curvatura sono ridefinite in termini puramente algebrici. Se potessimo formulare una versione non commutativa della teoria delle altezze, potremmo scoprire nuove strutture invisibili nel setting commutativo classico.

L'impatto pedagogico dello studio del problema di Mahler non dovrebbe essere sottovalutato. Per studenti di matematica avanzata, il problema fornisce un punto di ingresso accessibile a tecniche sofisticate da teoria algebrica dei numeri, geometria algebrica e analisi complessa. La formulazione del problema è elementare (richiedendo solo conoscenza di base sui numeri complessi e polinomi), ma la sua soluzione tocca alcune delle idee più profonde della matematica moderna.

Corsi universitari avanzati e scuole estive su teoria dei numeri spesso includono il problema di Mahler come caso di studio, permettendo agli studenti di vedere come diverse aree della matematica interagiscono nella risoluzione di un singolo problema. Il limite di Dobrowolski, con la sua dimostrazione che combina principio del cassetto, disuguaglianza di Jensen, lemma di Siegel e stime diofantee, esemplifica la bellezza della sintesi matematica e l'importanza di padroneggiare tecniche da domini diversi.

La storia del problema di Mahler illustra anche aspetti sociologici della ricerca matematica. La formulazione originale di Mahler negli anni quaranta attrasse poca attenzione iniziale, ma il problema guadagnò prominenza negli anni settanta e ottanta quando Dobrowolski e altri ottennero risultati parziali significativi. L'esplosione di interesse negli anni novanta, stimolata dalle connessioni con dinamica aritmetica e dal lavoro di Zhang sulla congettura di Bogomolov, dimostra come problemi dormenti possano risvegliarsi quando connessioni con altre aree emergono.

La collaborazione internazionale è stata cruciale per i progressi nel problema di Mahler. Matematici da Europa, Nord America, Asia e altre regioni hanno contribuito idee essenziali, e conferenze internazionali hanno fornito fori per scambio di tecniche e risultati. La natura altamente tecnica del campo richiede comunicazione stretta tra esperti, e la comunità matematica ha sviluppato meccanismi efficaci (pubblicazioni, preprint servers, workshops) per facilitare questa comunicazione.

L'avvento di strumenti computazionali ha trasformato la ricerca sul problema di Mahler. Software di algebra computazionale permette ai matematici di calcolare misure di Mahler per miliardi di numeri algebrici, cercando pattern e testando congetture. Database di numeri di Pisot, numeri di Salem e altri numeri algebrici speciali sono liberamente disponibili online, facilitando la ricerca sperimentale. Tecniche di machine learning sono state recentemente applicate per identificare pattern nelle distribuzioni di misure di Mahler, anche se interpretare i risultati richiede ancora intuizione matematica profonda.

Guardando al futuro, possiamo anticipare diverse direzioni promettenti per la ricerca. Lo sviluppo di nuove tecniche dalla geometria aritmetica, in particolare estensioni della teoria dell'intersezione di Arakelov a contesti più generali, potrebbe fornire strumenti per attaccare versioni generalizzate del problema di Mahler. Progressi nella comprensione dei sistemi dinamici aritmetici, inclusi sviluppi nella teoria del punto fisso e nella teoria dell'iterazione, potrebbero illuminare la struttura dei punti preperiodici e la distribuzione delle altezze canoniche.

L'applicazione di metodi dalla teoria ergodica quantitativa, che studia tassi di convergenza in teoremi ergodici classici, potrebbe fornire stime esplicite nei risultati di equidistribuzione e permettere calcoli più precisi di costanti in bounds di altezza. Tecniche dalla geometria simplettica e dalla teoria delle foliazioni, applicate a fibrations su spazi di moduli, potrebbero rivelare nuove strutture geometriche rilevanti per la teoria delle altezze.

In conclusione, il problema di Mahler sulla misura di numeri algebrici rappresenta molto più di una singola questione tecnica in teoria dei numeri. È un nodo in una vasta rete di idee matematiche che connette algebra, analisi, geometria, dinamica e teoria computazionale. Le sue connessioni con la dinamica aritmetica hanno arricchito entrambi i campi, portando a nuove prospettive e risultati profondi come la dimostrazione della congettura di Bogomolov.

Il fatto che la congettura di Mahler originale rimanga aperta dopo quasi ottanta anni non è segno di fallimento ma testimonianza della sua profondità. I problemi più importanti della matematica sono spesso quelli che resistono agli attacchi iniziali, richiedendo lo sviluppo di nuove tecniche e nuove prospettive. Il problema di Mahler ha già catalizzato enormi progressi nella nostra comprensione dei numeri algebrici, delle altezze e della dinamica aritmetica. Che venga eventualmente risolto o rimanga aperto per decenni ancora, continuerà a ispirare ricerca e a guidare lo sviluppo della matematica in direzioni fruttuose.

Per i matematici del futuro, il problema di Mahler offre un esempio paradigmatico di come questioni apparentemente semplici possano nascondere complessità straordinarie, di come diverse aree della matematica siano profondamente interconnesse, e di come la ricerca matematica richieda non solo competenza tecnica ma anche creatività, perseveranza e visione sintetica. L'eredità di Kurt Mahler e dei molti matematici che hanno lavorato su questo problema è non solo nei risultati tecnici ottenuti, ma nella dimostrazione che la matematica è un'impresa viva, dinamica e perennemente affascinante che continua a rivelare meraviglie nascoste nella struttura dell'universo matematico.